



PROPAGAÇÃO DE ONDAS EM CRISTAIS GRANULARES

LUIS P. S. MACHADO^{1*}, DANILO S. SANTOS¹, S. SEN²

¹Universidade Federal do Pará, Campus de Tucuruí, Núcleo de Desenvolvimento Amazônico em Engenharia (NDAE), Laboratório de Fluidodinâmica e Particulados (FluidPar)

²Department of Physics, State University of New York, Buffalo, New York, USA

*e-mail: luismachado@ufpa.br

RESUMO – Existem cenários onde deseja-se controlar explosões e fortes impactos. Exemplos são contextos guerra, proteção de objetos e estruturas frágeis, coletes à prova de bala etc. Este trabalho compila brevemente nossas contribuições recentes em propostas teóricas de arranjos granulares que poderiam atuar como atenuadores de impacto. Tratam-se de: (i) cristal bidimensional de rede quadrada, afilada e decorada com grãos intersticiais; (ii) cadeia monodispersa decorada lateralmente com grãos fixados (soldados) nas paredes. Após um pulso ser gerado devido a colisão de um grão, em ambos os casos, mais de 90% do momento linear incidente é atenuado por cristais de comprimentos de apenas 5 grãos. Compara-se os resultados com outros arranjos conhecidos: cadeia monodispersa usual e cadeia afilada. Nos nossos trabalhos anteriores, os arranjos eram compostos por grãos esféricos. Aqui, também apresenta-se os resultados para grãos cilíndricos.

INTRODUÇÃO

Cristais granulares são arranjos altamente organizados constituídos por grãos elásticos, geralmente grãos esféricos, em que cada partícula interage somente com os vizinhos. Através de perturbações em alguma região do sistema, pode-se gerar ondas mecânicas que se propagam no cristal (Nesterenko, 2001). Por exemplo, um grão localizado nas extremidades do sistema pode colidir com um grão vizinho, esse último colidirá com seu vizinho oposto, que por sua vez colidirá com o próximo vizinho e assim sucessivamente, produzindo uma onda. Por se tratarem de vibrações mecânicas pode-se manipular o meio material e controlar algumas características ondulatórias como reflexão, amplitude, dispersão, frequência etc. (Rosas e Lindenberg, 2018). Com isso, torna-se possível construir dispositivos que se comportem como atenuadores de impacto (Machado *et al.*, 2014). Alguns cenários de interesse são coletes à prova de bala, áreas

para testes de explosões, cenários de guerra, proteção contra abalos sísmicos e qualquer superfície que se deseje proteger contra fortes impactos, ondas de choque e explosões.

A motivação aos estudos nessa área encontra-se no interesse teórico em problemas fundamentais da dinâmica de ondas na presença de interações não-lineares, que permite a descoberta de fenômenos inexistente em outras áreas. O interesse prático para muitas aplicações também chama atenção. Alguns cristais granulares possuem vasta serventia em engenharias (Tiwari *et al.*, 2017), como: o redirecionamento de pulsos mecânicos, lentes acústicas, técnicas para sondar solos, filtros e transmissores de vibrações mecânicas.

Nosso principal interesse está no desenvolvimento teórico de um dispositivo granular capaz de atenuar pulsos mecânicos. Assim, faremos uma revisão de algumas das nossas recentes contribuições que se encontram na literatura. A contribuição original aqui está na comparação quando os

arranjos são constituídos por grãos de outra geometria (cilíndrica). Assim, mostra-se que as atenuações ocorrem devido a dispersão promovida pela própria configuração do arranjo granular e não pela geométrica dos grãos. Isso facilita a reprodução experimental e aplicações.

MODELOS DE CRISTAIS GRANULARES

Essa seção apresenta os arranjos granulares. Todos os arranjos possuem em comum as seguintes condições iniciais: os grãos estão em repouso e apenas se tocam, não existe compressão ou forças iniciais. O grão mais à esquerda apresenta velocidade não-nula na direção do cristal, que irá perturbar o sistema. Essa perturbação se propagará como um pulso solitário através de sucessivas colisões entre os grãos vizinhos.

Cadeia Monodispersa

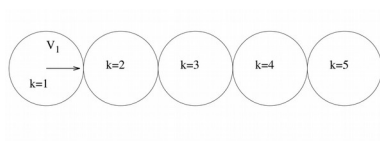


Figura 1: Cadeia monodispersa.

Esse sistema unidimensional trata-se do caso mais simples de cristal granular. Na literatura é chamado Cadeia Monodispersa, conforme ilustrado na Figura 1. Constitui-se por um perfeito alinhamento de grãos idênticos. Devido sua simplicidade, esse sistema foi o primeiro a ser estudado, de forma numérica, analítica e experimental. Nesterenko (1983) tem trabalhos pioneiros nesse cenário. O parâmetro mais importante desse arranjo é a quantidade de grãos na cadeia. Usamos esse sistema apenas como referência.

Cadeia Afilada

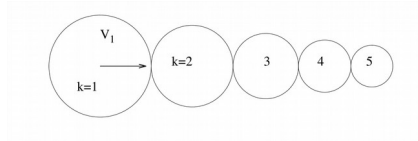


Figura 2: Cadeia afilada

Uma variação da cadeia monodispersa trata-se das cadeias afiladas, ilustrada na Figura 2. Nesses sistemas, os grãos mantêm seu alinhamento perfeito, mas os grãos diminuem progressivamente seus raios ao longo da cadeia de acordo com alguma regra. Variações comuns nos raios seguem regras lineares e exponenciais. Os raios dos grãos também podem aumentar, nesses casos as cadeias são chamadas afiladas inversas. Trabalhos pioneiros nessa área foram reportados por Sen *et al.* (2008). Um parâmetro de controle importante nesses sistemas é o parâmetro de afilamento (q), que controla a variação dos raios. Aqui, o raio do k -ésimo grão diminui segundo

$$R_{k+1} = (1 - q)R_k \quad (1)$$

onde k é a posição do grão na cadeia (Machado *et al.*, 2013).

Cristal Quadrado Afilado e Decorado

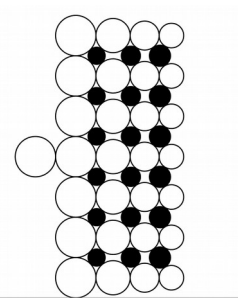


Figura 3: Cristal quadrado afilado e decorado

Esse é um cristal bidimensional constituído por 2 tipos de grãos: principais e intersticiais, conforme a Figura 2. Esse arranjo foi originalmente proposto por Machado e Sen (2018). Os grãos principais estão distribuídos seguindo uma rede quadrada. Os seus raios diminuem a cada camada do cristal de acordo com

$$R_l = R(1 + q)^{1-l} \quad (2)$$

onde R é o raio do grão incidente, q o parâmetro de afilamento e l é a posição da camada no cristal. A função do grão principal é transmitir perturbações externas, na forma de momento linear e energia, para camadas mais profundas do cristal. Os grãos intersticiais estão localizados estrategicamente entre os grãos principais, fornecendo algo parecido com uma “decoração” ao cristal. Sua principal função é aumentar o número de colisões entre

os grãos por unidade de área e aumentar as possibilidades de dispersão do sistema. Para que os grãos principais e intersticiais continuem a manter o contato da condição inicial, os raios dos grãos intersticiais aumentam a cada camada, dado por

$$r_{l,l+1} = \frac{\sqrt{(2R)^2 + (R_l + R_{l+1})^2} - (R_l + R_{l+1})}{2} \quad (3)$$

O parâmetro de afilamento e número de camadas são importantes nesses cristais.

Cadeia com Decoração Fixa

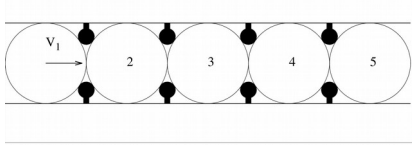


Figura 4: Cadeia monodispersa com decoração intersticial lateral fixa.

Esse é um sistema formado por uma cadeia monodispersa decorada lateralmente por grãos fixos intersticiais, ilustrado na Figura 4. Esse arranjo foi primeiro proposta por Machado e Sen (2021). Novamente, teremos grãos principais e intersticiais. Uma diferença relevante é que essa decoração é fixa, pode-se pensar em algo como uma solda, nas paredes laterais. Essa decoração fixa também tem uma função estrutural, para manter o alinhamento da cadeia. Esse é um sistema quase-unidimensional, pois existe uma distribuição de grãos em mais de uma dimensão, mas devido a simetria do sistema todas as componentes vetoriais importantes estão ao longo do eixo que une os grãos principais. O parâmetro de controle relevante é a razão entre os raios dos grãos principais e intersticiais.

FORÇA ELÁSTICA ENTRE OS GRÃOS

O modelo de força mais comum, e simples, trata-se de uma força elástica de contato tipo mola não-linear, em que se considera os grãos como pontos materiais. Quando os grãos vizinhos perdem o contato, a força é nula. Assim, a equação de movimento pode ser escrita como

$$m_k \frac{d\vec{v}_k}{dt} = - \sum_{k+1} \alpha_{k,k+1} (\delta_{k,k+1})^n \hat{r}_{k,k+1} \quad (4)$$

onde m_k e v_k são a massa e velocidade do grão k , e t é o tempo. O sinal negativo satisfaz a terceira lei de Newton. O somatório ocorre sob todos os primeiros vizinhos do grão k , ou seja, os grãos $k+1$. δ representa a compressão na direção normal entre 2 grãos vizinhos e n é um expoente que depende da geometria dos grãos. Para grãos esféricos tem-se que $n=3/2$, o qual pode ser obtido da Teoria de Contato de Hertz (1881). Para grãos cilíndricos, tem-se $n=1$ e o potencial é semelhante ao caso harmônico. Na simetria cilíndrica, considera-se que a colisão ocorre entre as laterais dos grãos. Destaca-se que os grãos esféricos são os mais estudados, numericamente, analiticamente e experimentalmente.

A constante elástica é descrita por

$$\alpha_{k,k+1} = \frac{4 E_k E_{k+1} \mathring{R}}{3 [E_k (1 - \rho_{k+1}^2) + E_{k+1} (1 - \rho_k^2)]} \quad (5)$$

onde E e ρ são o módulo de Young e a razão de Poisson, respectivamente, ambos dizem respeito a dureza dos materiais. Escreve-se a constante geométrica como

$$\mathring{R} = \sqrt{\frac{R_k R_{k+1}}{R_k + R_{k+1}}} \quad (6)$$

onde R é o raio dos grãos. Quando o grão interage com uma parede plana, modelamos a parede como um grão de raio infinito e obtemos $\mathring{R} = \sqrt{R_k}$. O versor da Equação 4 é dado por

$$\hat{r}_{k,k+1} = \frac{\vec{s}_{k+1} - \vec{s}_k}{|\vec{s}_{k+1} - \vec{s}_k|} \quad (7)$$

que aponta do centro geométrico do grão k para o centro do grão $k+1$, onde \vec{s}_k é o vetor posição do grão k .

Efeitos Dissipativos

As interações em cristais granulares ocorrem principalmente por colisões inelásticas. Muitos trabalhos inserem efeitos dissipativos modelando forças viscosas que dependem das velocidades. Nesses casos, imagina-se que os grãos estão imersos em um líquido viscoso. Contudo, essas abordagens aumentam o esforço computacional. Optamos

por modelar os efeitos dissipativos explorando a predominância desses efeitos nas forças restauradoras. Escrevemos (Walton e Braun, 1986),

$$\frac{F_{restauradora}}{F_{deformadora}} = 1 - \omega \quad (8)$$

onde $F_{deformadora}$ e $F_{restauradora}$ são as forças em que, os objetos quando em contato, estão se aproximando e se afastando, respectivamente. Tem-se que $0 \leq \omega \leq 1$ é um parâmetro livre que deve ter valores razoáveis. Para $\omega = 0$ tem-se colisões elásticas.

PARÂMETROS DE SIMULAÇÃO

Tabela 1: Parâmetros materiais. Segunda coluna: Modulo de Young. Terceira coluna: Razão de Poisson. Quarta coluna: massa do grão esférico incidente. (Machado e Sen, 2021)

Material	E [GPa]	ρ	m_1 [g]
Policarbonato (parede)	2,4	0,37	-
Tungstênio	628	0,28	6,76
Delrin	3,1	0,35	0,6

Os materiais usados nas simulações são apresentados na Tabela 1. Os raios do primeiro grão, chamado de grão incidente, identificado por $k=1$ nas figuras anteriores, apresenta o seguinte valor $R_1 = 4,76$ mm. A velocidade inicial do grão incidente é dada por $V_1 = 1$ m/s. Para outras velocidades muda-se a escala temporal da dinâmica, mas o comportamento qualitativo não se altera. Para os efeitos dissipativos, usou-se $\omega = 0,1$ em todos os casos. A principal influência de ω na dinâmica é atrasar os perfis temporais. Ou seja, a atenuação de impactos é oriunda majoritariamente da dispersão da energia obtida com a escolha apropriada dos arranjos granulares e não dos efeitos dissipativos.

Para a cadeia monodispersa, ilustrada na Figura 1, usou-se 5 grãos feitos de Delrin (plástico). Também usou-se Delrin para as cadeias afiladas, conforme apresentado na Figura 2. No cristal quadrado afilado, retratado na Figura 3, os grãos principais são feitos de

Delrin e os intersticiais de Tungstênio. Essa mesma combinação material utilizou-se na cadeia monodispersa com decoração fixa, conforme a Figura 4. Combinações com outros materiais foram estudados por Machado e Sen (2018 e 2021), mas os reportados acima mostram as maiores atenuações de impacto.

As equações de movimento, Equação 4, foram resolvidas através do Método de Gear de Ordem 5. Trata-se de um método numérico do tipo preditor-corretor para EDO. Empregou-se como passo de tempo $\Delta t = 10^{-6}$ s, onde verificou-se a conservação da energia mecânica com um erro relativo menor que 10^{-11} .

RESULTADOS E DISCUSSÃO

Para melhor comparação, os resultados de todos os 4 arranjos granulares das Figuras 1-4 foram reunidos na Figura 5, onde mostra-se a evolução temporal do momento linear de cada grão ao longo da cadeia. Assim, a curva mais à esquerda corresponde ao grão $k = 1$, a segunda curva ao grão $k = 2$ e por aí adiante. Normalizou-se os momentos lineares pelo momento linear do grão incidente. Apenas a componente vetorial do momento linear na direção do impacto foi plotada. Também se compara a dinâmica para dois valores do expoente da força elástica, Equação 5, quando $n=3/2$ (grãos esféricos) e $n=1$ (grãos cilíndricos).

Na Figura 5, truncou-se a maioria das curvas para se evitar excesso de informação e poluição visual. Contudo, todos os casos apresentam a seguinte dinâmica em comum: o grão incidente $k=1$ colide e transmite a perturbação inicial para o grão $k=2$, o processo se repete com o grão $k=3$ e assim por diante. Devido as extremidades dos sistemas serem abertos, o grão incidente $k=1$ é ricochetado com momento linear negativo. O último grão é ejetado da cadeia como uma partícula livre, por isso o comportamento do seu momento linear não segue os demais grãos. Tem-se sempre que, parte da perturbação inicial (energia e momento linear) não alcança a outra extremidade (direita) da cadeia. Após algumas poucas colisões, a perturbação inicial se transforma em um pulso que se propaga ao

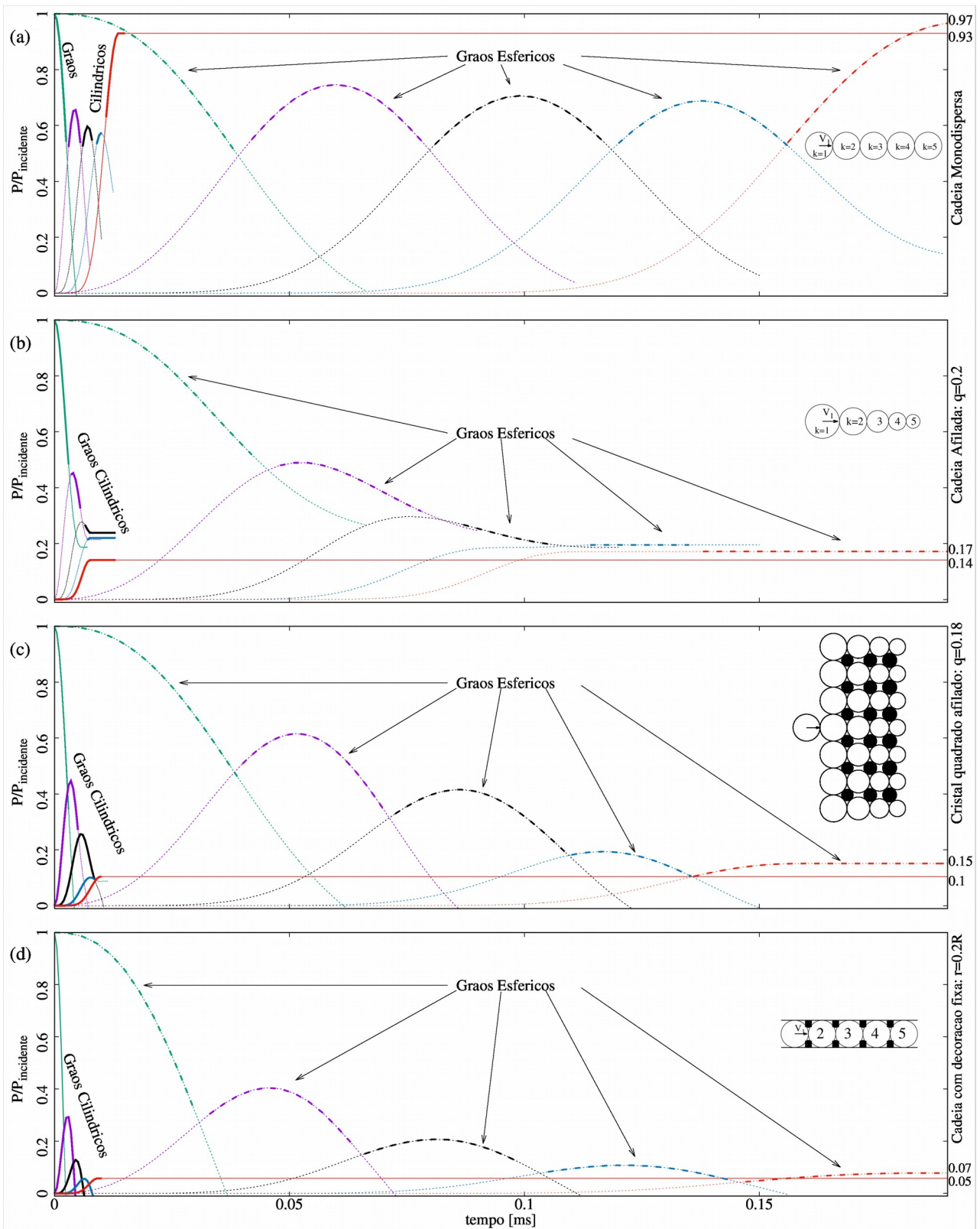


Figura 5: Perfil do momento linear na direção do impacto, normalizado pelo momento inicial do grão incidente, em função do tempo para cada grão da cadeia. Todos os cristais apresentam 5 grãos ao longo da direção de impacto. (a) Cadeia monodispersa. (b) Cadeia afilada, com parâmetro de afilamento $q=0.2$. (c) Cristal quadrado afilado com $q=0.18$. (d) Cadeia monodispersa com decoração lateral fixada na parede e $r/R=0,2$, sendo essa a razão entre os raios dos grãos intersticiais e principais. Para todos os arranjos, o impacto é absorvido de modo mais rápido e intenso quando os grãos apresentam simetria cilíndrica. No melhor resultado, item (d), 95% do momento incidente é atenuado.

longo do sistema. Entretanto, a amplitude máxima do pulso sempre é menor que a perturbação inicial, mesmo nos casos elásticos, pois parte da perturbação não é transmitida para frente. Essas são as conclusões gerais da dinâmica de propagação de pulsos em cadeias granulares.

Também, algumas características distintas são observadas para os diferentes valores do expoente n da força elástica (ver Equação 5). Primeiro, para $n=1$ a força é intensa mesmo para pequenas compressões, como é o presente estudo onde tem-se grãos metálicos (duros). Assim, a dinâmica temporal é mais rápida para grãos cilíndricos. Note na Figura 5 que, em todos os casos, o último grão cilíndrico é ejetado rapidamente, quando comparado com os grãos esféricos. Segundo, para $n=1$ o pulso gerado na cadeia granular não é estável. Sua amplitude decai e a largura aumenta, ambos continuamente. Logo, a dispersão para $n=1$ é maior. Esse comportamento pode ser mais identificado na Figura 5(a). Nessa figura, para grãos cilíndricos, a amplitude do perfil do momento linear decai sucessivamente entre os grãos $k=2, 3$ e 4 . Para grãos esféricos isso não ocorre, a amplitude do pulso para os grãos $k=2, 3$ e 4 são aproximadamente idênticos. Terceiro, para $n=1$, todos os grãos são ricocheteados e ejetados da cadeia conforme o pulso passa pelo grão. Esse resultado é previsto teoricamente pela conservação do momento linear. Tudo isso explica o momento linear do último grão ser sempre menor para grãos cilíndricos em relação aos grãos esféricos.

Em particular, os resultados da Figura 5(a) tem sido extensamente estudados (Nesterenko, 2001). Para a atenuação de momento linear, importante na absorção de impacto, o caso da Figura 5(a) não apresenta bons resultados. Quase a totalidade do momento linear incidente é transmitido para a outra extremidade. Na Figura 5(b), os perfis se tornam gradualmente mais largos a cada grão. Os grãos maiores ao colidirem com grãos menores seguintes continuam a se deslocar para frente. Forma-se uma cauda atrás da frente de onda. Com isso, melhora-se drasticamente a absorção do momento linear. Atenua-se $\sim 80\%$ do momento linear incidente

(Machado, 2013). Na Figura 5(c), devido ao maior número de graus de liberdade, o momento linear incidente é redirecionado da direção inicial de impacto para as outras direções. De tal forma, a perturbação inicial é espalhada pela rede de contato dos grãos. Atenua-se $\sim 85\%$ do momento linear incidente (Machado e Sen, 2018). Por fim, na Figura 5(d) observa-se um íngreme decaimento do momento linear ao longo da cadeia. A decoração fixa atua como uma “armadilha” que dificulta a transmissão do momento linear para frente. Os grãos recebem a energia, e momento linear, dos grãos de trás e permanecem oscilando entre as decorações fixas. O momento linear permanece “preso” logo nos primeiros 3 grãos. Tem-se que mais de 90% do momento linear incidente é atenuado (Machado, 2021).

Na Figura 5, observa-se que o momento linear ejetado no último grão cilíndrico é ainda ligeiramente inferior. Esses resultados ainda não tinham sido apresentados. Com isso temos que, para atenuar impactos, mais importante do que a forma dos grãos é o arranjo granular, ou seja, a distribuição dos grãos no espaço e suas redes de contato. Deve-se notar que todos os arranjos granulares aqui estudados são extremamente curtos, formados com o comprimento de 5 grãos. Isso permite o desenvolvimento de dispositivos de pequeno volume, o que aumenta o apelo e versatilidade das propostas.

CONCLUSÃO

Esse trabalho consistiu de um compilado breve de trabalhos anteriores na área de propagação de pulsos em cristais granulares. Como contribuição, acrescentou-se aqui comparações com resultados de cristais formados por grãos cilindros. A maioria dos trabalhos na área exploram grãos esféricos. Mostrou-se que é possível atenuar $\sim 95\%$ do momento linear incidente com sistemas de volume extremamente pequeno. Como vantagem adicional, deve-se lembrar que os cristais granulares são facilmente reescaláveis, devido a modelagem das forças não se alterarem, o que preserva a dinâmica e os resultados qualitativos. Além disso, existem outras possibilidades de uso desses sistemas

que aumenta sua abrangência de aplicações. Esses cristais mostraram-se excelentes filtros passa-baixa de vibrações mecânicas, onde as frequências de corte são funções das amplitudes da excitação, parâmetro de afilamento da cadeia granular e constantes dissipativas (Machado e Sen, 2020). Tem-se que para ondas de frequências baixas, os cristais granulares transmitem a onda como se fossem guias de onda. Para frequências altas, a onda é filtrada (Machado e Sen, 2021). Assim, pode-se isolar ambientes de ruídos, ondas ultrassônicas e frequências indesejadas. Por fim, temos trabalhos ainda não publicados que sugerem alguns cristais com potencial para amplificar sinais incidentes, o que pode ser usado para “colher” energia (transformar energia mecânica em energia elétrica).

granular spheres, *International Journal of Modern Physics B*, Vol 31, p.1742012.

REFERÊNCIAS

- Hertz, H. (1881), On the contact of elastic solids, *J. Reine Angew. Math.*, Vol 92, p.156-171.
- Machado, L. P. S., Rosas, A., Lindenberg K. (2013), Momentum and energy propagation in tapered granular chains, *Granular Matter*, Vol 15, p.735-746.
- Machado, L. P. S., Rosas, A., Lindenberg K. (2014), A quasi-unidimensional granular chain to attenuate impact, *The European Physical Journal E*, Vol 37, p.119.
- Machado, L. P. S., Sen, S. (2018), Controlled energy dispersion in 2D decorated granular crystals, *Physical Review E*, Vol 98, p.032907.
- Nesterenko, V. F. (1983), Propagation of nonlinear compression pulses in granular media, *Journal of Applied Mechanics and Technical Physics*, Vol 24, p.733-743.
- Nesterenko, V. F. (2001), *Dynamics of Heterogeneous Materials*, Springer, New York.
- Rosas, A., Lindenberg (2018), Pulse propagation in granular chains, *Physics Reports*, Vol 735, p.1-37.
- Sen S., Hong, J., Bang J., Avalos E., Doney, R. (2008), Solitary waves in the granular chain, *Physics Reports*, Vol 462, p.21-66.
- Tiwari, M., Mohan T. R. K., Sen S. (2017), Impact decimation using alignment of