



## **DESENVOLVIMENTO E VALIDAÇÃO DE UMA EQUAÇÃO DE CORREÇÃO DA FORÇA DE LUBRIFICAÇÃO PARA A MODELAGEM DO IMPACTO DE PARTÍCULAS EM LÍQUIDOS VISCOSOS USANDO CFD-DEM**

JOÃO P. F. CAMPOS<sup>1\*</sup>, GABRIELA C. LOPES<sup>1</sup>

<sup>1</sup>Universidade Federal de São Carlos, Programa de Pós-Graduação em Engenharia Química  
Departamento de Engenharia Química  
\*e-mail: joaopfc@estudante.ufscar.br

**RESUMO** – escoamentos multifásicos do tipo sólido-fluido são recorrentes em aplicações de engenharia química. Devido a escala e dinamicidade dos fenômenos inerentes a esse tipo de sistema, efeitos microscópicos envolvendo partículas individuais são difíceis de serem estudados experimentalmente. Nesse sentido, ferramentas numéricas que usam a abordagem CFD-DEM (do inglês Fluidodinâmica Computacional – Método dos Elementos Discretos) têm-se mostrado promissoras na compreensão dessas interações, já que simulam a fase sólida em uma microescala. No entanto, sua aplicação na simulação de escoamentos sólido-líquido é pouco estudada devido à dificuldade de modelar forças viscosas como a força de lubrificação, responsável por dissipar a energia de partículas em colisões e causada pelo escoamento do fluido intersticial. O presente trabalho teve como objetivo investigar a validade de um modelo da força de lubrificação usado na literatura em simulações sólido-líquido em CFD-DEM através da simulação de experimentos. A partir dos resultados obtidos um novo modelo foi proposto em que o valor da força é corrigido por uma equação que depende da velocidade relativa das partículas imediatamente antes do impacto.

### **INTRODUÇÃO**

Escoamentos multifásicos envolvendo fluidos e materiais particulados estão presentes em diversas aplicações da indústria química. Uma aplicação comum desse tipo de sistema é o leito fluidizado, equipamento simples e versátil que tem sido usado na produção de biocombustíveis, por exemplo (Gabardo *et al.*, 2012; Ren *et al.*, 2013; Akram *et al.*; 2015, Gibson *et al.*, 2019).

Nesse contexto, a modelagem numérica utilizando o acoplamento da Fluidodinâmica Computacional e a Modelagem de Elementos Discretos, chamada de CFD-DEM, oferece a vantagem de auxiliar no projeto de equipamentos que envolvam esse tipo de escoamento. Nessa abordagem, a fase fluida é modelada em CFD através da discretização temporal e espacial das equações da

continuidade e de transferência de momento. Dessa forma, o fluxo de fluido é calculado em volumes fixos no espaço chamados de células da malha numérica.

Já na abordagem DEM, a velocidade e a trajetória de cada partícula são calculadas individualmente pela solução da segunda lei de Newton (Cundall e Strack, 1979). As forças partícula-partícula devido a colisão ou forças de campo podem ser calculadas a partir de diversos modelos disponíveis na literatura, a depender do tipo de sistema a ser simulado.

Por fim, no acoplamento CFD-DEM as forças fluido-partícula são calculadas e transmitidas para o CFD e para o DEM como um par ação-reação. As forças mais comumente incluídas são as de arraste, empuxo, aquelas associadas aos gradientes de pressão e tensão viscosa.

Existem duas variações principais do acoplamento CFD-DEM que diferem na escala de discretização da fase fluida, chamadas de resolvida e não resolvida. Na primeira, a malha numérica que representa a fase fluida deve ser refinada o suficiente para que o escoamento ao redor de cada partícula seja plenamente capturado, resultando em volumes da malha na dimensão de uma fração do diâmetro das partículas. Sua principal vantagem é que forças interfases como a de arraste, por exemplo, não precisam de modelos empíricos e podem ser calculadas diretamente. Por outro lado, seu custo computacional é elevado a ponto de limitar sua aplicação em grande escala, além de sua aplicação ser incerta em sistemas concentrados com alta frequência de colisões entre partículas (Blais *et al.*, 2016). Já na variação não resolvida, as células da malha são de 3 a 4 vezes maiores que as partículas, reduzindo consideravelmente o custo computacional e simplificando a solução, porém sendo necessário a inclusão de modelos empíricos para o cálculo de forças que não podem ser capturadas pela solução da fase fluida. Nessa abordagem, as forças interfases são projetadas para cada célula da malha através de uma de uma média volumétrica, em que o somatório de todas as forças sólido-fluido que atuam sobre uma partícula em uma dada célula é dividido pelo volume desta e somado na equação de momento.

Boa parte da literatura em CFD-DEM simula escoamentos gás-sólido, já que nesses sistemas as forças interfases podem ser reduzidas predominantemente à força de arraste e à força devido ao gradiente de pressão do fluido, facilitando a modelagem (Ku *et al.* 2015; Wang *et al.* 2021; Zhou *et al.* 2020). Dessa forma, uma força pouco estudada em CFD-DEM, por ser relevante apenas para fluidos de alta viscosidade, é a chamada força de lubrificação. Trata-se de uma força dissipativa causada pelo escoamento intersticial entre duas partículas, que age na direção contrária ao movimento relativo dos corpos, estando diretamente relacionada à viscosidade do fluido (Joseph 2003; Ruiz-Ângulo e Hunt 2010; Sun e Xiao 2016; Zhang *et al.*, 2005). Estudos experimentais demonstram que a força de lubrificação é responsável por aumentar consideravelmente a energia dissipada em

colisões. Essa dissipação pode ser quantificada através do coeficiente de restituição, número adimensional calculado como a razão entre as velocidades da partícula imediatamente após e antes do impacto. Em seu trabalho, Joseph (2003) demonstrou que esse coeficiente é proporcional ao número de Stokes, número adimensional calculado pela razão da inércia da partícula pelo arraste viscoso. Quanto maior a viscosidade do fluido, e, conseqüente menor for o número de Stokes, menor será o coeficiente de restituição.

A implementação dessa força em CFD-DEM pode ser feita de maneira indireta, usando correlações empíricas para o coeficiente de restituição (Liu *et al.*, 2016), ou de forma direta, usando sua formulação fenomenológica. O trabalho de Davis *et al.* (1986) apresentou uma solução analítica para a força de lubrificação obtida a partir das seguintes hipóteses:

- Escoamento intersticial puramente viscoso (Stokesiano);
- Perfil de pressão radial;
- Superfícies perfeitamente lisas;
- Fluido tratado como meio contínuo, independente do grau de proximidade das partículas.

Essas hipóteses, em conjunto com as equações de quantidade de movimento e de continuidade, bem como com as condições de contorno apropriadas, resultam no perfil de pressão intersticial, que quando integrado ao longo da superfície das partículas, resulta na equação analítica da força de lubrificação, mostrada na Equação 1.

$$F_{lub} = \frac{3\pi\mu R^2 v}{2h} \quad (1)$$

Em que  $\mu$  é a viscosidade do fluido,  $R$  o raio reduzido das partículas (igual a metade do raio, no caso de partículas iguais),  $v$  a velocidade relativa das duas partículas e  $h$  a distância entre elas. A implementação desse modelo requer um cuidado: conforme as partículas se aproximam, o valor de  $h$  tende a 0 e a força diverge para infinito. Embora isso cause problemas numéricos, trata-se de uma condição coerente com as hipóteses usadas na solução e esse comportamento é conhecido como o paradoxo de Stokes (Zhang *et al.*, 2005), em que dada as condições apresentadas

acima, a força de lubrificação entre duas partículas se aproximando de fato tenderá ao infinito e impedirá que ocorra contato. É claro que essa situação não representa a realidade, sendo que o contato ocorre entre as rugosidades superficiais das partículas, e a presença de forças externas de maior magnitude como a gravitacional ou o arraste permitem que ocorra contato. Numericamente, esse problema é contornado na literatura através da introdução de um parâmetro de distância mínima, um valor fixo e, em geral, na mesma escala da rugosidade superficial dos materiais, que impõe um limite inferior ao valor de  $h$  (Wang *et al.* 2017; Wang *et al.* 2018; Campos *et al.* 2021). Não há, no entanto, uma investigação completa se de fato a introdução desse parâmetro fixo é capaz de reproduzir os efeitos da força de lubrificação verificados experimentalmente.

Nesse contexto, o presente trabalho teve como objetivo investigar a validade da implementação da força de lubrificação em um programa CFD-DEM de código aberto com base na Equação 1, além de propor uma nova abordagem que reproduza os efeitos da força observados experimentalmente.

## METODOLOGIA

O programa utilizado para as simulações CFD-DEM foi o CFDEM<sup>®</sup>project, programa gratuito e de código aberto que realiza o acoplamento entre os programas openFOAM<sup>®</sup> (conjunto de ferramentas para solução de equações diferenciais) e LIGGGHTS<sup>®</sup> (modelagem de elementos discretos).

Existem diversas formulações para a fase fluida, em geral derivadas da já estabelecida modelagem de dois fluidos (TFM), técnica usada para simular escoamentos multifásicos. Não há, no entanto, um consenso na literatura quanto ao modelo mais apropriado. O desenvolvimento e as diferenças entre cada formulação são discutidos mais a fundo nos trabalhos de Norouzi *et al.* (2016) e de Zhou *et al.* (2010). O modelo utilizado para a fase fluida neste trabalho é conhecido na literatura como modelo Tipo A ou Tipo II, e é apresentado nas Equações 2 e 3 a seguir.

$$\frac{\partial \varepsilon}{\partial t} + \nabla(\varepsilon_f u_f) = 0 \quad (2)$$

$$\frac{\partial(\rho_f \varepsilon_f u_f)}{\partial t} + \nabla(\rho_f \varepsilon_f u_f u_f) = -\varepsilon_f \nabla p + \varepsilon_f \nabla \tau - F_s - K_{p,f}(u_f - \langle u_p \rangle) + \varepsilon_f \rho_f g \quad (3)$$

Em que  $u_f$  é a velocidade do fluido,  $\rho_f$  sua densidade,  $p$  a pressão,  $g$  a aceleração da gravidade e  $\varepsilon_f$  a fração de fluido na célula da malha. Nessa formulação, as forças sólido-fluido devido aos gradientes de pressão e de tensão viscosa já estão incluídos diretamente no primeiro e segundo termo do lado direito da Equação 3. O termo  $F_s$  agrega todas as forças que não dependem do escoamento, que no caso desse trabalho é a média volumétrica da força de empuxo que atua nas partículas calculada pela lei de Arquimedes, dada pela Equação 4.

$$F_s = \frac{\sum_i V_{pi} \rho_f g}{V} \quad (4)$$

em que  $V$  é o volume da célula e  $V_{pi}$  o volume da partícula que ocupa a célula. O termo  $K_{p,f}$  inclui a média volumétrica da força de arraste, calculada implicitamente na velocidade do fluido no passo de tempo atual. Como a abordagem CFD-DEM usada nesse trabalho foi a não resolvida, a força de arraste precisa ser calculada. O modelo de arraste usado para este fim foi o de Di Felice (1994), representado pelas Equações 5 a 8.

$$K_{p,f} = \frac{\sum_i F_d}{V |u_f - \langle u_p \rangle|} \quad (5)$$

$$F_d = 0,125 C_d \rho_f \pi d_p^2 |u_f - u_p| \varepsilon_f^{-\chi} \quad (6)$$

$$\chi = 3,7 - 0,65 \exp \left[ - \frac{(1,5 - \log_{10} Re_p)^2}{2} \right] \quad (7)$$

$$C_d = \left( 0,63 + \frac{4,8}{\sqrt{Re_p}} \right)^2 \quad (8)$$

A fase sólida foi resolvida pelo LIGGGHTS<sup>®</sup>, através da integração numérica ao longo do tempo da segunda lei de Newton

para as direções normais e tangencial, representada pelas Equações 9 e 10, respectivamente.

$$m_i \frac{du_p}{dt} = \sum f_c + f_g + f_f \quad (9)$$

$$I_i \frac{d\omega_i}{dt} = \sum M \quad (10)$$

Nestas equações, termo  $f_g$  corresponde à força gravitacional, enquanto  $f_f$  contabiliza as forças devido a fase fluida, tais como: arraste (o termo  $F_d$  da Equação 5), empuxo, lubrificação e as forças devido aos gradientes de pressão e tensão viscosa. O termo  $f_c$  corresponde às forças de contato calculadas no LIGGGHTS® pelo modelo de Tsuji (1992), apresentado na Equação 11.

$$f_{c_{i,j}} = -K_n \delta_n - \gamma_n v_n - K_t \delta_t - \gamma_t v_t \quad (11)$$

Os índices  $n$  e  $t$  correspondem às direções normal e tangencial;  $K$  é o coeficiente de rigidez elástica;  $\gamma$  o coeficiente inelástico ou dissipativo e  $\delta$  a deformação elástica. As equações constitutivas para  $K$  e  $\gamma$  estão disponíveis nos trabalhos de Tsuji (1992) e Norouzi *et al.* (2016). Esses coeficientes dependem de propriedades físicas dos materiais, como o módulo de elasticidade, a razão de Poisson e os coeficientes de atrito e de restituição.

As simulações buscaram reproduzir as condições experimentais de Joseph (2003), em que colisões de esferas de aço imersas em soluções aquosas de diferentes concentrações de glicerol foram estudadas. Os experimentos utilizaram um pêndulo para garantir que não houvesse desvios na trajetória das partículas e para que as colisões ocorressem sempre na direção normal. Como esses obstáculos não existem em simulações numéricas, o método da queda livre foi utilizado. Inicialmente, uma partícula foi criada em uma posição fixa no espaço onde permanece estacionária. Em seguida, uma segunda partícula foi criada acima da primeira, de onde inicia queda livre até a colisão com a partícula imobilizada. As propriedades físicas das partículas e da fase fluida usadas nas simulações são apresentadas nas Tabela 1 e 2, respectivamente.

Tabela 1: Propriedades físicas da fase sólida.

Material particulado	
Módulo de Young (Pa)	$1 \times 10^9$
Razão de Poisson	0,27
Coefficiente de restituição	0,97
Coefficiente de fricção	0,30
Densidade (kg/m <sup>3</sup> )	7780,00
Diâmetro (mm)	6,35

Tabela 2: Propriedades físicas do fluido.

Viscosidade (Pa.s)	0,02520
Densidade (kg/m <sup>3</sup> )	1189,25
Glicerol 50%	
Viscosidade (Pa.s)	0,00504
Densidade (kg/m <sup>3</sup> )	1123,75

Embora o coeficiente de restituição seja um parâmetro de entrada, com a inclusão de uma força dissipativa na direção normal, como a força de lubrificação, a restituição resultante nas simulações não é igual ao parâmetro de entrada. O coeficiente simulado foi calculado a partir da razão entre as velocidades imediatamente antes e após o impacto.

A geometria utilizada consistiu de uma caixa retangular simples de dimensões 10 x 10 x 20 cm, sendo todas as 6 faces tratadas como parede. O domínio foi discretizado por células hexaédricas de 1 x 1 x 1 cm, totalizando 2000 elementos. Os passos de tempo usados foram  $10^{-6}$  para a fase sólida e  $10^{-3}$  para a fase fluida, ocorrendo o acoplamento a cada 1000 passos do DEM. Os resultados de posição e velocidade das partículas foram salvos a cada 10 passos, por um total de 1s de simulação.

Na primeira etapa de simulações, buscou-se verificar o resultado apresentado por Campos *et al.* (2021), em que um parâmetro de distância mínima fixo para a Equação 1 foi usado para avaliar a força de lubrificação. Os resultados desse trabalho mostram que há um valor do parâmetro que produz resultados próximos dos experimentais, porém a hipótese não foi testada para diferentes velocidades de impacto. Dessa forma, o primeiro conjunto de simulações utilizou valores variados para o parâmetro fixo

para colisões em uma solução de glicerol 74%. Cada valor do parâmetro foi testado para 7 velocidades de impacto diferentes, controladas pela altura de queda da partícula. Os resultados foram comparados com a correlação de Ruiz-Angulo e Hunt (2010), obtida pelo ajuste dos dados experimentais de Joseph (2003) e que relaciona o coeficiente de restituição com o número de Stokes de impacto, apresentada na Equação 12.

$$e_{fit} = 1 - \frac{8.65}{St^{0.75}} \quad (12)$$

Em que  $St$  é o número de Stokes no momento de impacto, dado pela Equação 13.

$$St = \frac{\rho_f v_1 r_p}{9\mu_f} \quad (13)$$

Os valores testados para o parâmetro de distância mínima, a partir de agora chamado de  $\alpha$ , e das alturas de queda são apresentados na Tabela 3.

Tabela 3: Valores de  $\alpha$  e de altura inicial de queda usados nas simulações.

$\alpha$ ( $\mu\text{m}$ )						
0,18	0,11	0,10	0,07	0,06	0,05	0,04
Altura inicial (cm)						
8,0	5,0	2,0	1,0	0,5	0,1	0,05

Os coeficientes de restituição simulados foram plotados em função do número de Stokes de impacto e do parâmetro de distância mínima,  $\alpha$ , e comparados com a correlação de Ruiz-Angulo e Hunt (2010) (Equação 12). Um ajuste logarítmico foi feito para cada grupo de pontos para um dado valor de  $\alpha$  e o ponto de interseção desses ajustes com a Equação 12 foi calculado. A partir desses pontos de interseção, foi construído um gráfico que relaciona o valor de  $\alpha$  com a velocidade de impacto calculada pelo número de Stokes. Uma função linear foi ajustada resultando em uma equação de  $\alpha$  em função da velocidade de impacto que foi implementada no modelo de lubrificação, de forma que  $\alpha$  passou a ser calculado

dinamicamente em função das condições de colisão. Os testes de queda livre foram repetidos e novamente comparados com a Equação 12. Por fim, para garantir que a equação desenvolvida fosse independente do fluido, um conjunto de simulações foi feito para uma solução de glicerol 50%.

## RESULTADOS

A Figura 1 traz os resultados dos coeficientes de restituição simulados em função do número de Stokes para cada valor de  $\alpha$  da primeira etapa de simulações.

O comportamento observado nas simulações do coeficiente de restituição aproxima-se muito de uma função logarítmica do número de Stokes, distante do comportamento esperado pela Equação 12. Esse resultado demonstra que o uso de um valor fixo para  $\alpha$  não é suficiente para simular o efeito da força de lubrificação verificado experimentalmente. Além disso, é possível notar que todos os conjuntos de pontos contêm em seu intervalo uma região de interseção com a curva da correlação empírica, ou seja, para cada valor de  $\alpha$  existe um valor de  $St$  que resulta em um coeficiente de restituição simulado próximo do real. O ponto exato dessa interseção fornece um par de  $\alpha$  e de número de Stokes que pode ser usado para desenvolver uma equação de correção. A Tabela 4 contém os ajustes de cada conjunto e seus respectivos coeficientes de determinação ( $R^2$ ).

Tabela 4: Equações ajustadas e  $R^2$ .

$\alpha$ (m)	Ajuste	$R^2$
1,80E-07	$0,0407 \ln(St) + 0,5806$	0,99
1,00E-07	$0,0640 \ln(St) + 0,3366$	0,99
5,00E-08	$0,0920 \ln(St) - 0,0384$	0,99
4,00E-08	$0,0972 \ln(St) - 0,1596$	0,99
6,00E-08	$0,0855 \ln(St) + 0,0649$	0,99
7,00E-08	$0,0796 \ln(St) + 0,1494$	0,99
1.10E-07	$0,0602 \ln(St) + 0,3804$	0,99

As equações da Tabela 3 foram igualadas a Equação 12 e resolvidas numericamente. Os valores de  $St$  dos pontos de interseção foram convertidos para velocidade de impacto a partir

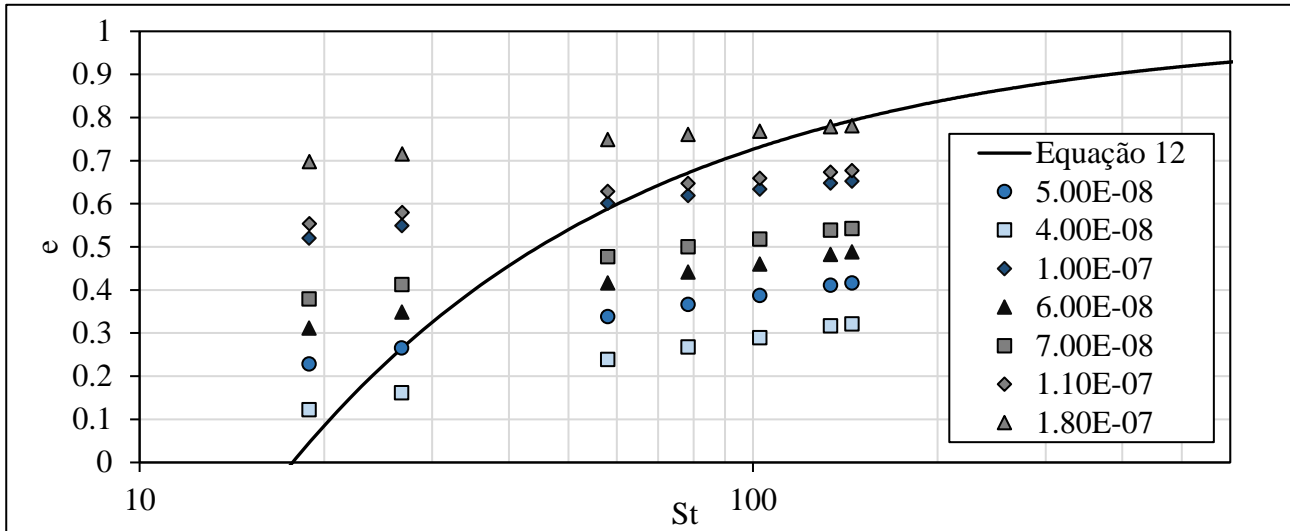


Figura 1: Coeficiente de restituição simulado em função do número de Stokes de impacto para diferentes valores de  $\alpha$ .

da Equação 13, e os pares  $\alpha$  e  $v_I$  foram usados para construção do gráfico apresentado na Figura 2.

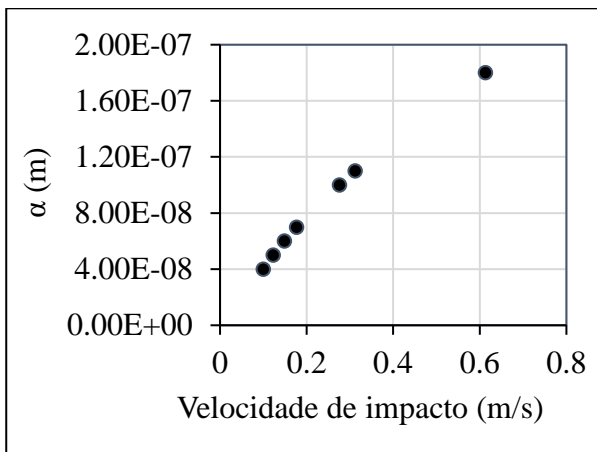


Figura 2: Valores de  $\alpha$  em função da velocidade de impacto calculada

Pela Figura 2 é possível inferir que o valor ideal de  $\alpha$  para o cálculo da força de lubrificação tem uma dependência aproximadamente linear com a velocidade no momento de impacto. A equação do ajuste dos pontos é apresentada na Equação 14.

$$\alpha = 3 \times 10^{-7} St + 2 \times 10^{-8} \quad (14)$$

O coeficiente de determinação do ajuste foi de 0,99. A Figura 3 traz os resultados das simulações de queda livre refeitas utilizando a Equação 14 para o cálculo dinâmico do valor de

$\alpha$  para soluções de 74% e 50% de glicerol. Dessa vez, as simulações foram capazes de produzir coeficientes de restituição próximos dos previstos pela Equação 12. Nota-se que os coeficientes simulados tendem a apresentar maiores desvios para colisões em baixa velocidade, como nos dois pontos de menor número de Stokes para cada conjunto de simulações. Isso indica que a Equação 14 ainda pode ser aprimorada, e que provavelmente os pontos coletados para sua construção não cobriram uma faixa satisfatória de colisões em velocidade reduzida. Além disso, embora a Equação 14 tenha sido desenvolvida utilizando exclusivamente as propriedades de uma solução de glicerol 74%, os resultados foram validados com sucesso também para uma solução de 50%. Com isso, conclui-se que o modelo desenvolvido para corrigir a implementação da força de lubrificação em simulações CFD-DEM foi validado e pode ser aplicado em simulações que envolva o escoamento de sólidos imersos em fluidos viscosos.

## CONCLUSÕES

A implementação da força de lubrificação em conjunto com um parâmetro de distância mínima fixo foi avaliada usando uma correlação empírica da literatura. Verificou-se que essa abordagem não reproduz o comportamento observado experimentalmente

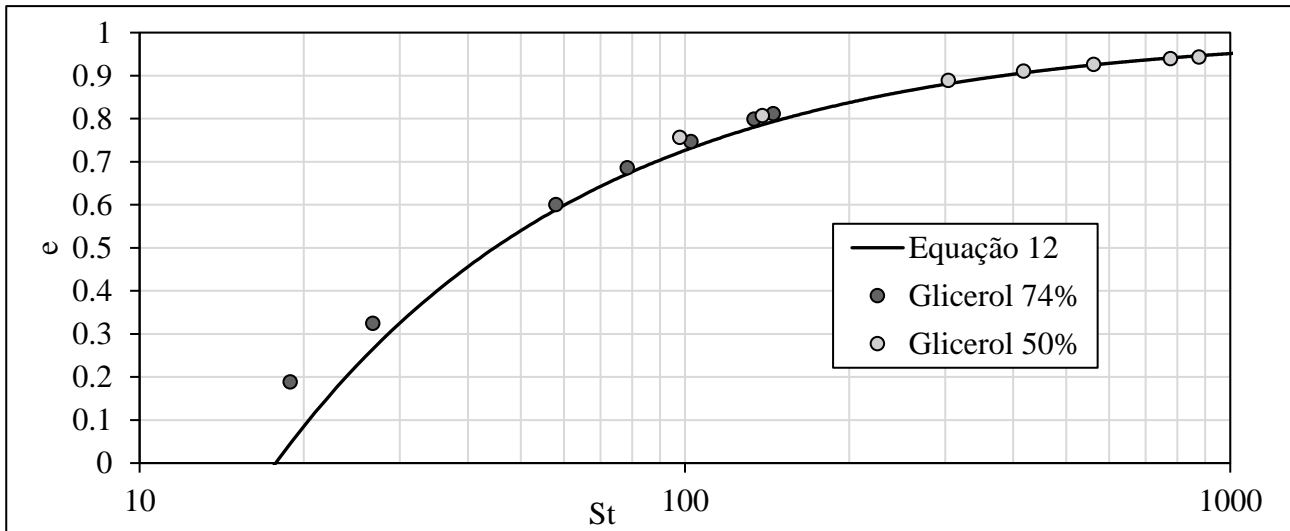


Figura 3: Coeficiente de restituição simulado em função do número de Stokes de impacto para diferentes fluidos usando a correlação proposta para  $\alpha$

de colisões em meios viscosos. A partir dos resultados das simulações de colisão com o parâmetro fixo, uma equação de correção foi ajustada e implementada no modelo de forma que o parâmetro de distância mínima passou a ser calculado em função da velocidade de impacto. O modelo com a equação de correção foi capaz de reproduzir o comportamento observado experimentalmente para a restituição e foi validado.

### AGRADECIMENTOS

O presente trabalho foi realizado com apoio da Coordenação de Aperfeiçoamento de Pessoal de Nível Superior - Brasil (CAPES) - Código de Financiamento 001, da Agência Nacional do Petróleo, Gás Natural e Biocombustíveis (ANP) e da Financiadora de Estudos e Projetos (FINEP).

### NOMENCLATURA

$F_{lub}$	Força de lubrificação (N)
$\mu$	Viscosidade do fluido (Pa.s)
$R$	Raio da partícula (m)
$v$	Velocidade relativa (m/s)
$h$	Distância (m)
$\varepsilon_f$	Fração de fluido
$u_f$	Velocidade do fluido (m/s)
$\rho_f$	Densidade do fluido (kg/m <sup>3</sup> )
$p$	Pressão (Pa)

$\tau$	Tensão viscosa (Pa)
$F_s$	Troca de momento (Pa/m)
$u_p$	Velocidade da partícula (m/s)
$g$	Aceleração da gravidade (m/s <sup>2</sup> )
$V_{pi}$	Volume da partícula $i$ (m <sup>3</sup> )
$V$	Volume da célula (m <sup>3</sup> )
$F_d$	Força de arraste (N)
$C_d$	Coefficiente de arraste
$d_p$	Diâmetro da partícula (m)
$Re_p$	Reynolds da partícula
$m_i$	Massa da partícula (kg)
$f_c$	Força de contato (N)
$f_g$	Força gravitacional (N)
$f_f$	Força interfásica (N)
$I_i$	Momento de inércia (kg/m <sup>2</sup> )
$\omega_i$	Velocidade angular (rad/s)
$M$	Momento angular (kg/m <sup>2</sup> s)
$St$	Número de Stokes
$v_I$	Velocidade de impacto (m/s)
$r_p$	Raio da partícula (m)

## REFERÊNCIAS

- AKRAM, C.; TAN, C. K.; GARWOOD, R.; THAI, S. M. (2015) Vinasse – a potential biofuel - Cofiring with coal in a fluidized combustor. *Fuel*, Vol. 158, p.1006 – 1015.
- BLAIS, B.; LASSAIGNE, M.; GONIVA, C.; FRADETTE, L.; BERTRAND, F. (2016), Development of an unresolved CFD-DEM model for the flow of viscous suspensions and its application to solid-liquid mixing. *Journal of Computational Physics*, Vol. 318, p.201-221.
- CAMPOS, J. P. F.; MELO, K. R. B.; LOPES, G. C. (2022), Implementation, validation and application of a lubrication force model in CFD-DEM simulations. *Brazilian Journal of Chemical Engineering*, Vol. 39, p.429-440.
- CUNDALL, P. A.; STRACK, O. D. L. (1979), A discrete numerical model for granular assemblies. *Géotechnique*, Vol. 29, No. 1, p.47 – 65.
- DAVIS, R. H.; SERAYSSOL, J.; HINCH, E. J. (1986), The elastohydrodynamic collision of two spheres. *J. Fluid Mech.*, Vol. 163, p.479-497.
- GABARDO, S.; RECH, R.; AYUB, M. A. Z. (2012), Performance of different immobilized-cell systems to efficiently produce ethanol from whey: fluidized batch, packed-bed and fluidized continuous bioreactors. *J. Chem. Technol. Biotechnol.*, Vol. 87, No. 8, p.1194 – 1201.
- GIBSON, I.; SLIM, C. J.; ZHENG, Y.; SCOTT, S. A.; DAVIDSON, J. F.; HAYHURST, A. N. (2019), The continuous combustion of glycerol in a fluidized bed. *Combust. Flame*, Vol 200, p.60 – 68
- JOSEPH, G. (2003), Collisional dynamics of macroscopic particles in a viscous fluid. 2003. Tese de doutorado – California Institute of Technology, Pasadena.
- KU, X.; LI, T.; Løvås, T. (2015), CFD-DEM simulation of biomass gasification with steam in a fluidized bed reactor. *Chem. Eng. Sci.*, Vol 122, p.270 – 283.
- LIU, G. et al. (2016), CFD-DEM simulation of liquid-solid fluidized bed with dynamic restitution coefficient. *Powder Technol.*, Vol 304, p.186 – 197.
- NOROUZI, H. R.; ZARGHAMI, R.; SOTUDEH-GHAREBAGH, R.; MOSTOUFI, N. (2016), Coupled CFD-DEM modelling. Wiley.
- REN, H.; LIU, B.; XIE, G.; ZHAO, L. (2014), Carrier modification and its application in continuous photo-hydrogen production using anaerobic fluidized bed photo-reactor. *Bioenergy*, Vol. 6, p.599-605.
- RUIZ-ANGULO, A.; HUNT, M. (2010), Measurements of the coefficient of restitution for particle collisions with ductile surfaces in a liquid. *Granul. Matter*, Vol.12, p.185-191.
- SUN, R.; XIAO, H. (2016), SediFoam: A general purpose, open-source CFD-DEM solver for particle-laden flow with emphasis on sediment transport. *Comput. Geosci.*, Vol. 89, p.207-219.
- TSUJI, Y.; TANAKA, T.; ISHIDA, T. (1992), Lagrangian numerical simulation of plug flow of cohesionless particles in a horizontal pipe. *Powder Technology*, Vol. 71, p.239-250.
- WANG, J.; KU, X.; LIN, J.; YANG, S. (2021), Impact of the reactor structure on biomass pyrolysis in fluidized-bed reactors: a coarse grained CFD-DEM study. *Energy & Fuels*, Vol. 35, p.10035 – 10050.
- WANG, S. et al. (2018), Numerical simulation of flow behavior of particles in an inverse liquid-solid fluidized bed with a jet using CFD-DEM. *Journal of the Taiwan*



Institute of Chemical Engineers, Vol. 82,  
p.214 – 225.

WANG, S. et al. (2018), Numerical simulation  
of flow behavior of particles in a porous  
media based on CFD-DEM. *Journal of  
Petroleum Science and Engineering*, Vol.  
171, p.140 – 152.

ZHANG, W.; NODA, R.; HORIO, M. (2005),  
Evaluation of lubrication force on  
colliding particles for DEM simulation of  
fluidized beds. *Powder Technol.*, Vol.  
158, p.92-101.

ZHOU, L.; HAN, C.; BAI, L.; LI, W.; EL-  
EMAM, M. A.; SHI, W. (2020), CFD-  
DEM bidirectional coupling simulation  
and experimental investigation of particle  
ejections and energy conversion in a  
spouted bed. *Energy*, Vol. 2011.

ZHOU, Z. Y.; KUANG, S. B.; CHU, K. W.;  
YU, A. B. (2010), Discrete particle  
simulation of particle-fluid flow: model  
formulations and their applicability.  
*Journal of Fluid Mechanics*, Vol. 661,  
p.482-510.